

Задача К1

Плоский шарнирно-рычажный механизм состоит из звеньев 1, 4, совершающих вращательное движение, звеньев 2, 3, совершающих плоскопараллельное движение, и ползунов B , E , совершающих возвратно-поступательное движение. Схемы механизмов приведены в Таблице 1.

Длины звеньев для всех вариантов равны соответственно:

$$l_1 = 0,4 \text{ м}; \quad l_2 = 1,2 \text{ м}; \quad l_3 = 1,4 \text{ м}; \quad l_4 = 0,6 \text{ м}; \quad AD = DB.$$

Положение механизма определяется углами α , β , γ , φ , θ .

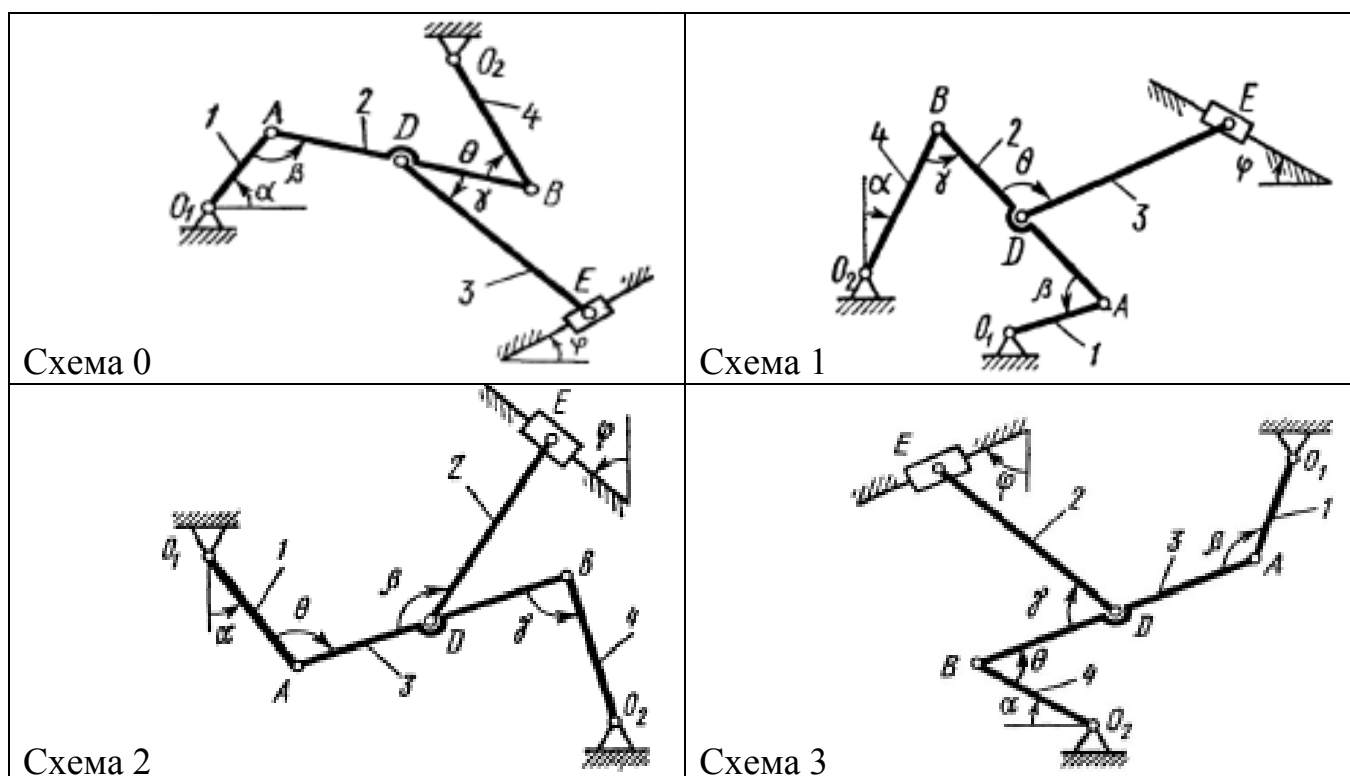
Построение положения механизма следует начинать со стержня, направление которого определяется углом α , направления отсчета углов по ходу или против хода часовой стрелки показаны дуговыми стрелками на схемах. Заданные угловую скорость и угловое ускорение считать направленными против часовой стрелки, а заданные скорость V_B и ускорение a_B – от точки B к b .

Численные значения углов и других заданных величин для схем 0-4 приведены в Таблице 2; для этих схем угловые скорости ω_1 и ω_4 — величины постоянные. Численные значения углов и других заданных величин для схем 5-9 приведены в Таблице 3.

Требуется построить заданное положение механизма, для этого положения определить угловые скорости и ускорения звеньев механизма, а также линейные скорости и ускорения точек механизма.

Вариант задания выбирается по последним двум цифрам зачетки: предпоследняя цифра – номер схемы (Таблица 1), последняя цифра – номер условия (Таблицы 2, 3). Например: №091365, механизм – 6, условие – 5.

Таблица 1. Схемы механизмов



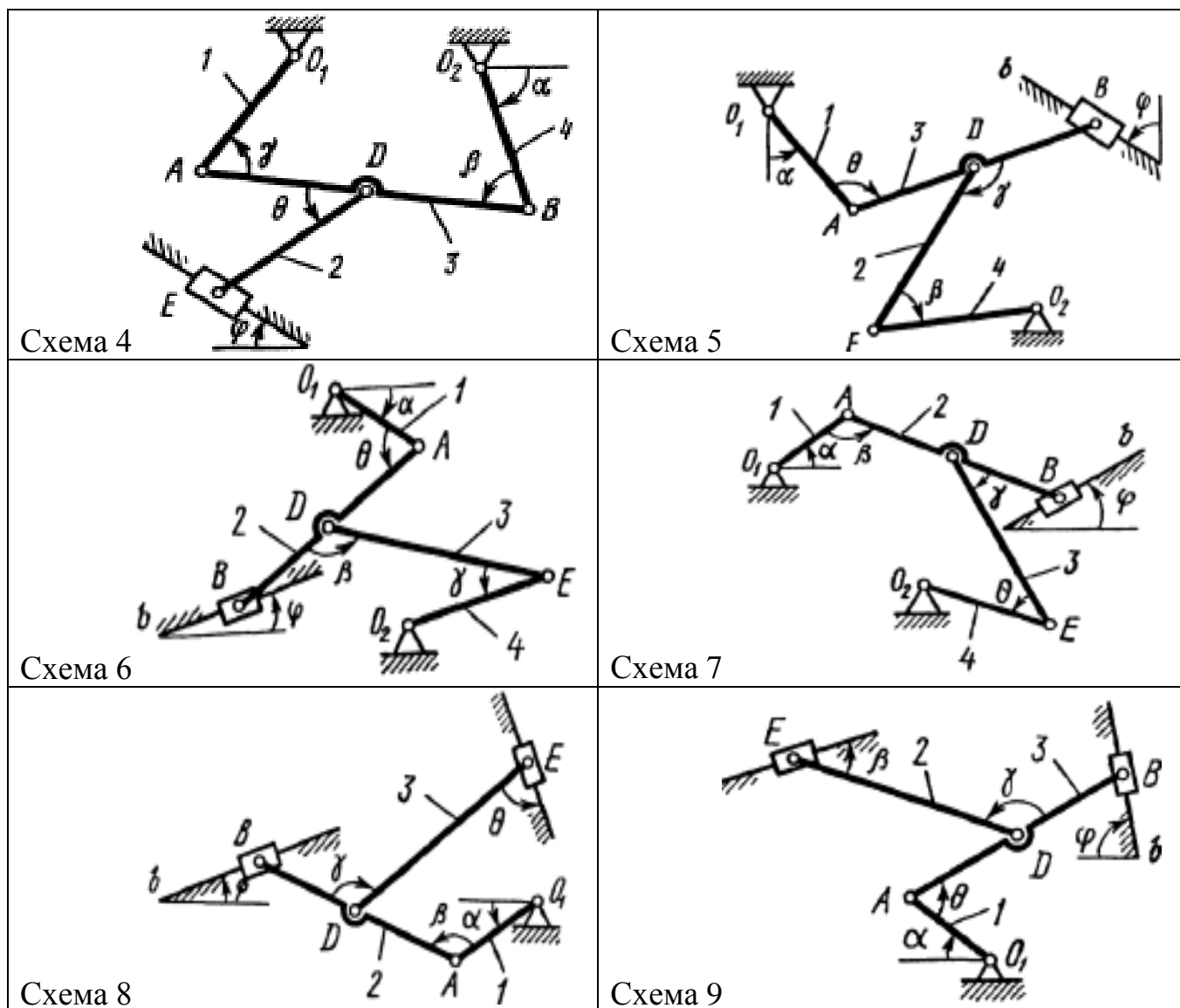


Таблица 2. Исходные данные для схем 0-4

Номер условия	Углы, град					Угловые скорости, c^{-1}		Определить			
	α	β	γ	φ	θ	ω_1	ω_4	V точек	ω звена	a точки	ε звена
0	0	60	30	0	120	6	-	B, E	DE	B	AB
1	90	120	150	0	30	-	4	A, E	AB	A	AB
2	30	60	30	0	120	5	-	B, E	AB	B	AB
3	60	150	150	90	30	-	5	A, E	DE	A	AB
4	30	30	60	0	150	4	-	D, E	AB	B	AB
5	90	120	120	90	60	-	6	A, E	AB	A	AB
6	90	150	120	90	30	3	-	B, E	DE	B	AB
7	0	60	60	0	120	-	2	A, E	DE	A	AB

8	60	150	120	90	30	2	-	D, E	AB	B	AB
9	30	120	150	0	60	-	8	A, E	DE	A	AB

Таблица 3. Исходные данные для схем 5-9

Номер условия	Углы, град					Угловые скорости (c^{-1}) и ускорения (c^{-2})		Линейные скорости (m/c) и ускорения (m/c^2)		Определить			
	α	β	γ	φ	θ	ω_1	ε_1	V_B	a_B	V точек	ω звена	a точки	ε звена
0	120	30	30	90	150	2	4	-	-	B, E	AB	B	AB
1	0	60	90	0	120	-	-	4	6	A, E	DE	A	AB
2	60	150	30	90	30	3	5	-	-	B, E	AB	B	AB
3	0	150	30	0	60	-	-	6	8	A, E	AB	A	AB
4	30	120	120	0	60	4	6	-	-	B, E	DE	B	AB
5	90	120	90	90	60	-	-	8	10	D, E	DE	A	AB
6	0	150	90	0	120	5	8	-	-	B, E	DE	B	AB
7	30	120	30	0	60	-	-	2	5	A, E	AB	A	AB
8	90	120	120	90	150	6	10	-	-	B, E	DE	B	AB
9	60	60	60	90	30	-	-	5	4	D, E	AB	A	AB

Указания к решению задачи К1

Это задача на исследование плоскопараллельного движения твердого тела. При ее решении для определения скоростей точек механизма и угловых скоростей его звеньев следует воспользоваться понятием о мгновенном центре скоростей и теоремой о проекциях скоростей двух точек тела, применяя эту теорему (или это понятие) к каждому звену механизма в отдельности. Для определения ускорений точек механизма следует воспользоваться теоремой о сложении ускорений при плоскопараллельном движении твердого тела.

На Рисунке 1 изображен кривошипно-ползунный механизм. Звенья механизма:

- звено 1 (кривошип) совершает вращательное движение;
- звено 2 (шатун) совершает плоскопараллельное движение;
- звено 3 (ползун) совершает возвратно-поступательное движение.

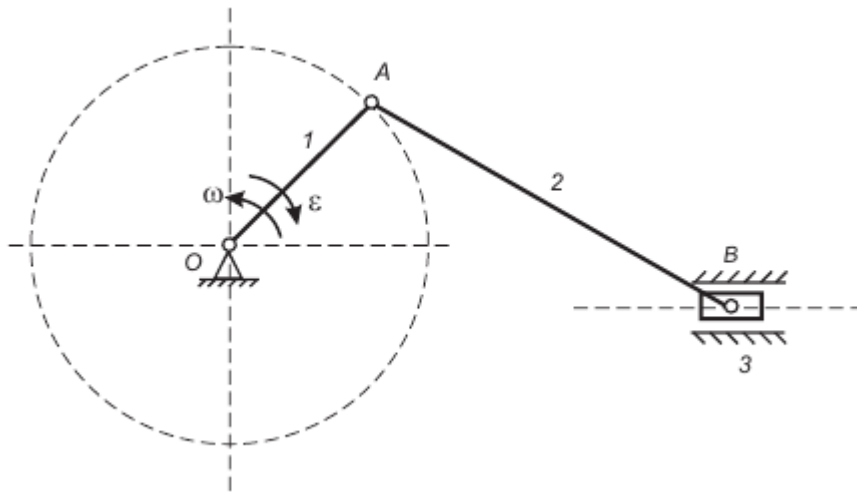


Рисунок 1. Кривошипно-ползунный механизм

Определение скоростей и ускорений при вращательном движении твердого тела (звено 1)

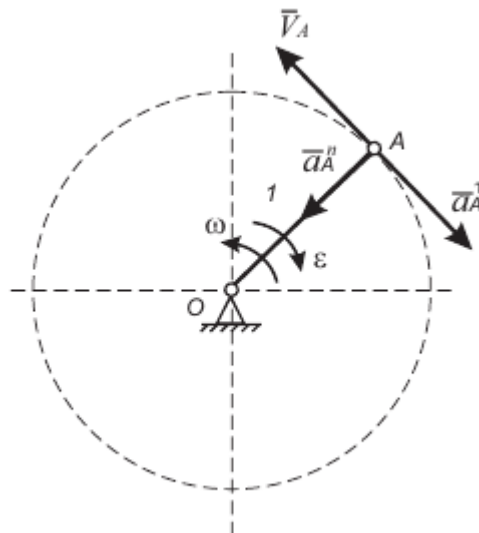


Рисунок 2. Скорости и ускорения при вращательном движении звена

Численное значение скорости точки вращающегося твердого тела (звено 1) равно произведению угловой скорости тела ω на расстояние от этой точки до оси вращения. Вектор скорости направлен по касательной к траектории в сторону угловой скорости.

$$V_A = \omega \cdot OA = \omega \cdot l_1$$

$$l_1 = OA$$

$$\vec{V}_A \perp OA \text{ по направлению } \omega$$

Вектор ускорения точки вращающегося твердого тела складывается из нормальной и касательной составляющих. Касательная составляющая ускорения направлена по касательной к траектории в сторону углового ускорения ε ; нормальная составляющая всегда направлена по радиусу к оси вращения.

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau$$

$$a_A^n = \omega^2 \cdot OA = \omega^2 \cdot l_1 \quad \bar{a}_A^n \text{ от } (\cdot)A \text{ к } (\cdot)O$$

$$a_A^\tau = \varepsilon \cdot OA = \varepsilon \cdot l_1 \quad \bar{a}_A^\tau \perp OA \text{ по направлению } \varepsilon$$

Определение скоростей и ускорений при плоскопараллельном движении
твёрдого тела (звено 2)

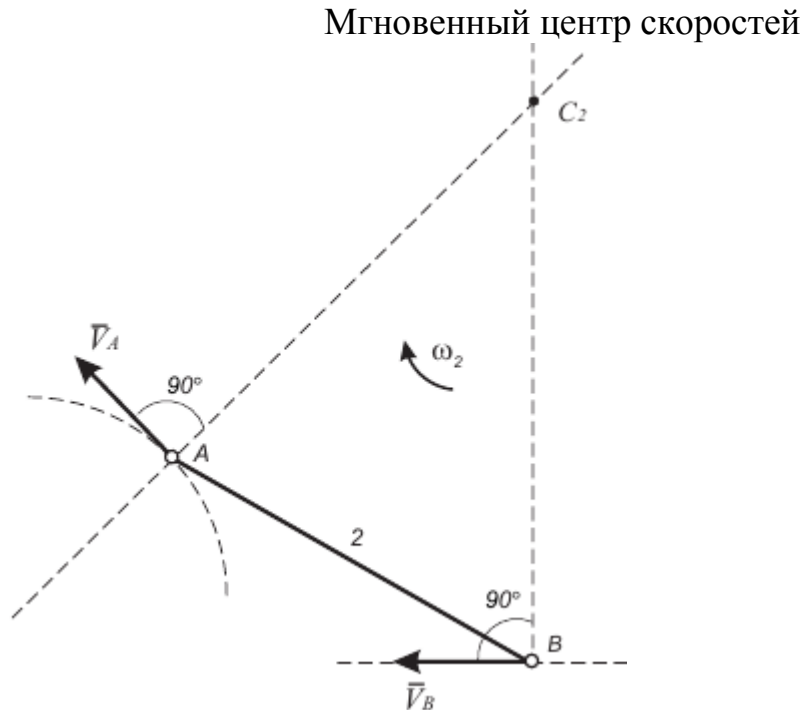


Рисунок 3. Определение положения мгновенного центра скоростей

Мгновенным центром скоростей тела (звена) называется точка, скорость которой в данный момент времени равна нулю. Для определения положения мгновенного центра скоростей надо знать направления скоростей двух точек A и B . Мгновенный центр скоростей C_2 находится в точке пересечения перпендикуляров, восставленных из точек A и B к векторам скоростей этих точек:

$$\vec{V}_A \perp AC_2$$

$$\vec{V}_B \perp BC_2$$

Скорости точек тела (звена) пропорциональны их расстояниям до мгновенного центра скоростей. Угловая скорость звена в данный момент времени равна отношению скорости точки к ее расстоянию до мгновенного центра скоростей:

$$\frac{V_A}{AC_2} = \frac{V_B}{BC_2} = \omega_2$$

$$V_A = \omega_2 AC_2$$

$$V_B = \omega_2 BC_2$$

Теорема о проекциях скоростей двух точек тела

Проекции скоростей двух точек тела (звено 2) на ось, проходящую через эти точки, равны друг другу:

$$V_A \cos \alpha = V_B \cos \beta$$

$$V_B = V_A \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$$

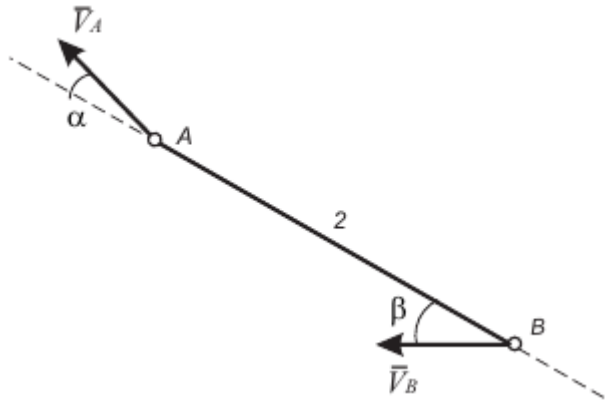


Рисунок 4. Определение скоростей по теореме о проекциях

Теорема о сложении ускорений при плоскопараллельном движении твердого тела

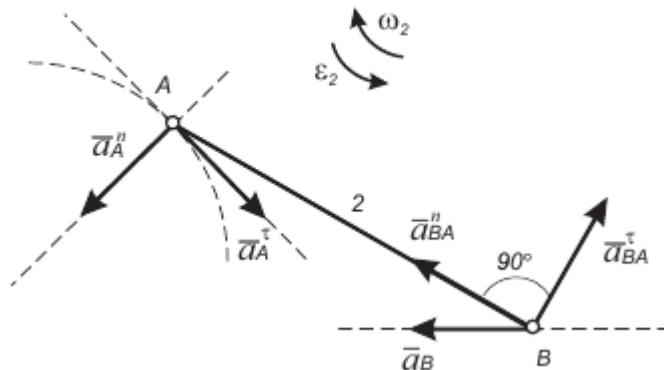


Рисунок 5. Определение ускорений при плоскопараллельном движении

Ускорение любой точки B тела (звена) равно векторной сумме ускорения точки A , принятой за полюс, и ускорения, которое точка B получает при относительном вращении вокруг этого полюса.

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau$$

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 BA = \omega_2^2 l_2$$

$$a_{BA}^\tau = \varepsilon_2 BA = \varepsilon_2 l_2$$

$$\bar{a}_{AB}^n \text{ от } (\cdot)B \text{ к } (\cdot)A$$

$$\bar{a}_{AB}^\tau \perp AB \text{ по направлению } \varepsilon$$

Пример решения задачи

Определить угловые скорости и ускорения звеньев механизма, а также линейные скорости и ускорения точек механизма.

Исходные данные:

Схема 0;

$$l_1 = 0,5 \text{ м}; \quad l_2 = 1,5 \text{ м}; \quad l_3 = 1,2 \text{ м}; \quad l_4 = 0,8 \text{ м}; \quad AD = DB$$

$$\alpha = 120^\circ, \quad \beta = 60^\circ, \quad \gamma = 90^\circ, \quad \varphi = 90^\circ, \quad \theta = 150^\circ$$

$$\omega_4 = 10 \text{ с}^{-1}$$

Найти: V_A , V_E , ω_{AB} , a_A , ε_{AB}

Решение

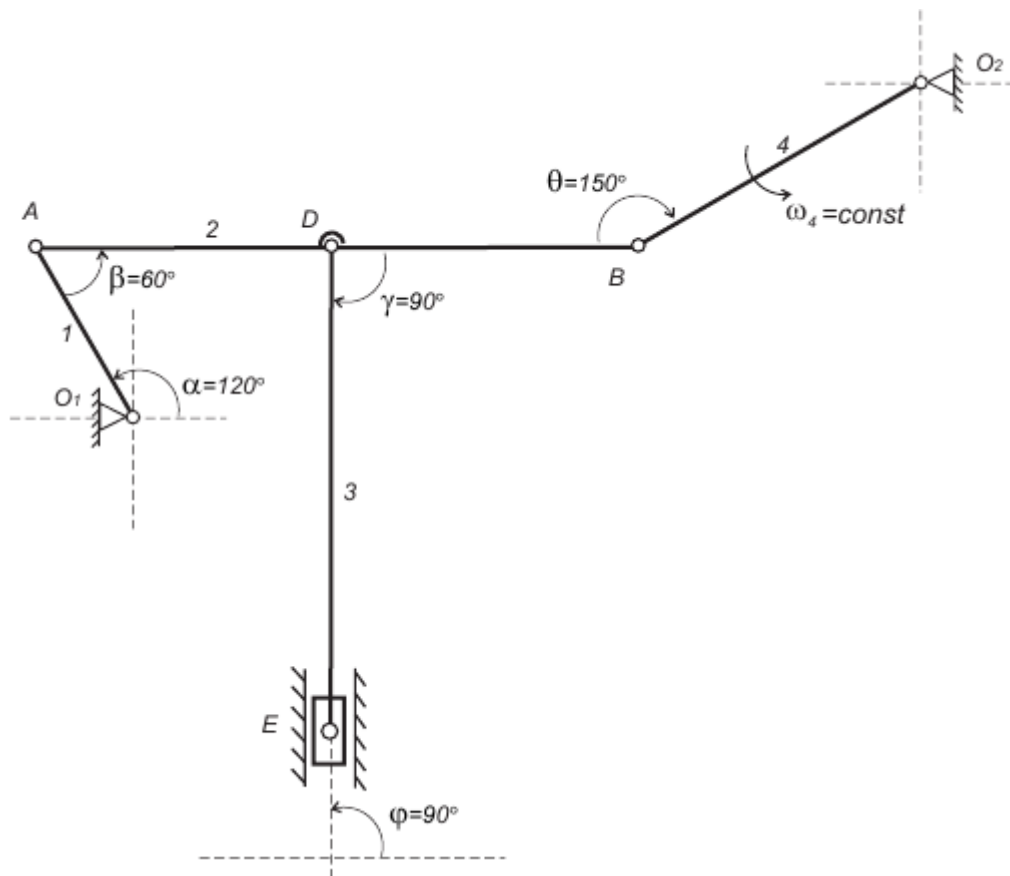


Рисунок 1. Механизм в заданном положении

Звенья 1 и 4 совершают вращательное движение. Звенья 2 и 3 – плоскопараллельное движение.

Определение скоростей.

$$V_B = \omega_4 l_4 = 8,0 \text{ м/с},$$

$$\bar{V}_A \perp AO_1$$

$$\bar{V}_B \perp BO_2$$

$$AC_2 \perp \bar{V}_A$$

$$BC_2 \perp \bar{V}_B$$

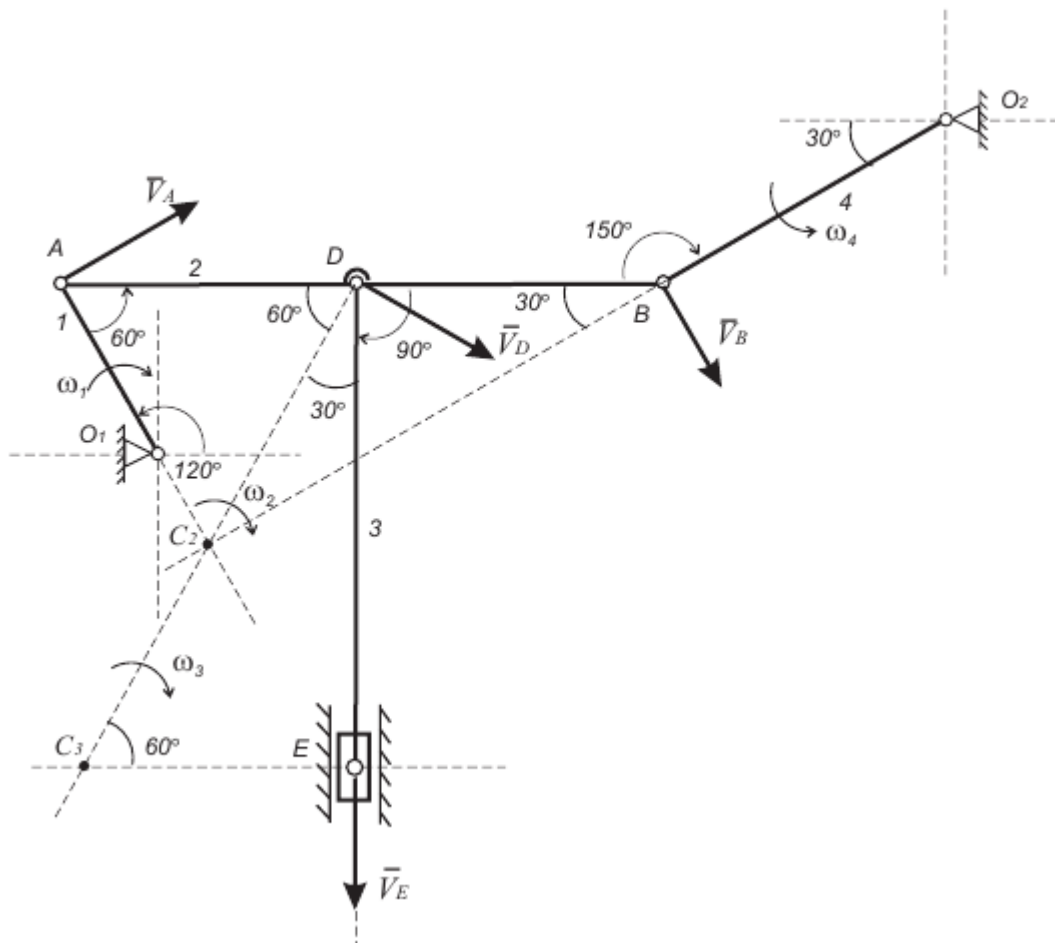


Рисунок 2. Определение скоростей

Точка C_2 – мгновенный центр скоростей звена 2,

$$\triangle AC_2B: AB=l_2, C_2B=l_2\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}l_2, C_2A=l_2\sin 30^\circ = 0,5l_2$$

$$\omega_2 = \frac{V_B}{BC_2} = \frac{8,0}{1,299} = 6,158 \text{ c}^{-1}$$

$$V_A = \omega_2 AC_2 = \omega_2 0,5l_2 = 4,619 \text{ м/с}$$

$$\triangle AC_2D: AD=0,5l_2, C_2A = C_2D = AD = 0,5l_2 = 0,75 \text{ м}$$

$$V_D = \omega_2 DC_2 = \omega_2 0,5l_2 = 4,619 \text{ м/с}$$

$$\omega_1 = \frac{V_A}{AO_1} = \frac{V_A}{l_1} = \frac{4,619}{0,5} = 9,238 \text{ c}^{-1}$$

$$\bar{V}_D \perp DC_3$$

$$\bar{V}_E \perp EC_3$$

Точка C_3 – мгновенный центр скоростей звена 3,

$$\triangle EC_3D:$$

$$DE = l_3$$

$$C_3E = l_3 \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} l_3, \quad C_3D = l_3 / \cos 30^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3} l_3$$

$$\omega_3 = \omega_{DE} = \frac{V_D}{DC_3} = \frac{4,619}{1,386} = 3,333 \text{ c}^{-1}$$

$$V_E = \omega_3 EC_3 = 3,333 \cdot 0,693 = 2,309 \text{ м/с}$$

По теореме о проекциях получим тот же результат:

$$V_E = V_D \cos 60^\circ = 2,309 \text{ м/с}$$

Определение ускорений.

$$a_B = a_B^n = \omega_4^2 l_4 = 80,0 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$$

$$a_B^\tau = \varepsilon_4 l_4 = 0$$

$$\bar{a}_B^n \parallel O_2B$$

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau$$

$$\bar{a}_A^n = \omega_1^2 l_1 = 42,667 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$$

$$a_A^\tau = \varepsilon_1 l_1$$

$$\bar{a}_A^n \parallel O_1A; \bar{a}_A^\tau \perp O_1A$$

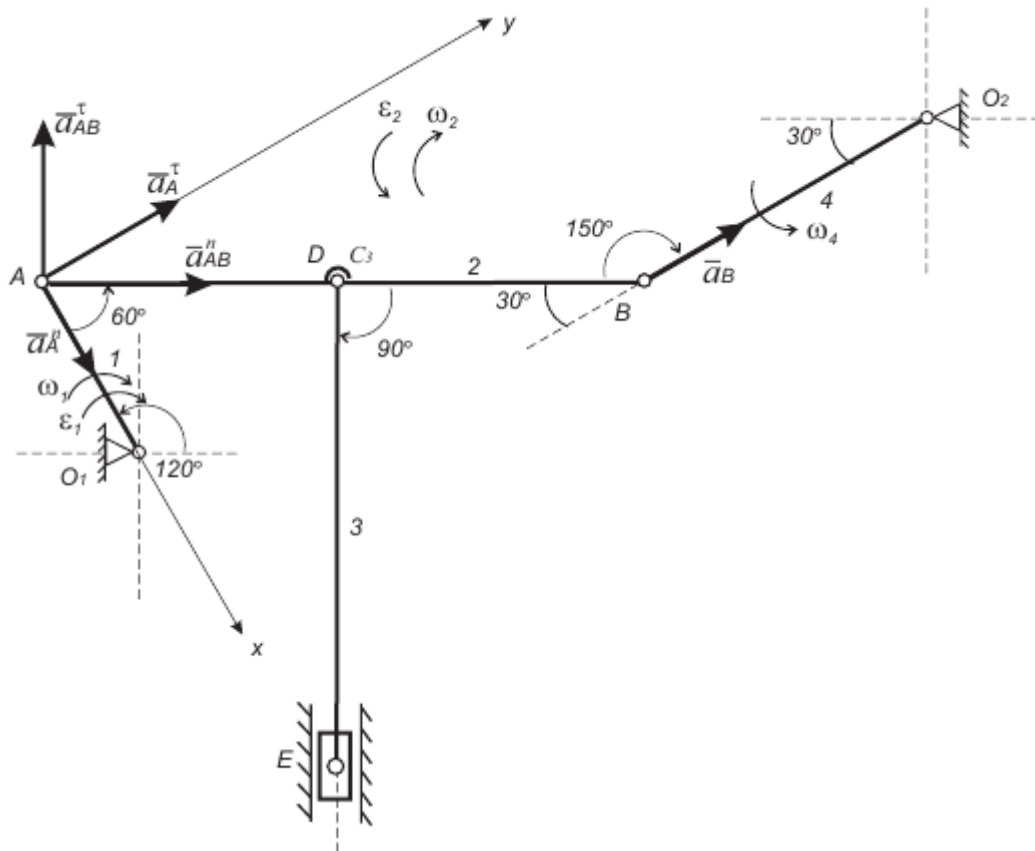


Рисунок 3. Определение ускорений

По теореме о сложении ускорений при плоскопараллельном движении:

$$\bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau = \bar{a}_B + \bar{a}_{AB}^n + \bar{a}_{AB}^\tau$$

$$\bar{a}_{AB}^n \parallel AB; \bar{a}_{AB}^\tau \perp AB$$

$$a_{AB}^n = \omega_2^2 l_2 = 56,889 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$$

$$a_{BA}^\tau = \varepsilon_2 l_2$$

Возьмем проекции векторного уравнения для ускорений на оси $xу$

$$0 + a_A^n = 0 + a_{AB}^n \sin 30^\circ - a_{AB}^\tau \cos 30^\circ$$

$$a_A^\tau + 0 = a_B + a_{AB}^n \cos 30^\circ + a_{AB}^\tau \sin 30^\circ$$

Определяем касательные ускорения:

$$a_{AB}^\tau = \frac{a_A^n - a_{AB}^n \sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = -16,422 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$$

$$a_A^\tau = a_B + a_{AB}^n \cos 30^\circ + a_{AB}^\tau \sin 30^\circ = 121,056 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$$

Отрицательный знак результата свидетельствует, что действительное направление вектора касательного ускорения противоположно направлению, выбранному на чертеже.

Угловые ускорения

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_{AB} = \frac{|a_{AB}^\tau|}{l_2} = \frac{16,422}{1,5} = 10,948 \text{ с}^{-2}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{|a_A^\tau|}{l_1} = \frac{121,056}{0,5} = 242,112 \text{ с}^{-2}$$

Полное ускорение точки B

$$a_A = \sqrt{(a_A^n)^2 + (a_A^\tau)^2} = \sqrt{(42,667)^2 + (121,056)^2} = 128,355 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$$

Ответ: $V_A=4,619 \text{ м/с}$, $V_E=3,309 \text{ м/с}$, $\omega_{AB}=6,158 \text{ с}^{-1}$, $a_A=128,355 \text{ м/с}^2$, $\varepsilon_{AB}=10,948 \text{ с}^{-2}$